Тема I. Четность

Задача 1. Квадратная таблица 25×25 раскрашена в 25 цветов так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все цвета. Докажите, что если расположение цветов симметрично относительно одной из диагоналей, то на этой диагонали тоже представлены все цвета.

Задача 2. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 3. Найдите все пары простых чисел таких, что и их сумма, и их разность — тоже простые числа.

Задача 4. Из набора домино выбросили все кости с пустышками. Можно ли все оставшиеся кости выложить в ряд?

Задача 5. Кузнечик прыгает по прямой. В первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см, в третий — 3 см и так далее. Докажите, что после 2006 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Задача 6. В классе 30 учеников и каждый день трое из них дежурят по классу. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

Задача 7. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

Задача 8. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих (либо легче, либо тяжелее). Петя выбрал одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

Задача 9. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Задача 10. Можно ли выписать в ряд цифры от 1 до 9 по два раза каждую так, чтобы между единицами была одна цифра, между двойками — две, ..., между девятками было девять цифр?

Тема II. Принцип Дирихле

Задача 1. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Задача 2. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2006.

Задача 3. Докажите, что из любых семи натуральных чисел можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

Задача 4. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 5. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Задача 6. Дано восемь различных натуральных чисел, не превосходящих 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Задача 7. Докажите, что в любой компании есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Задача 8. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Задача 9. Существует ли натуральное число, состоящие лишь из нулей и единиц, делящееся на 2006.

Задача 10. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат?

Тема III. Неравенство треугольника

Задача 1. a, b и c — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Задача 2. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

Задача 3. Известно, что в треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что $AB + AC \leqslant 2BC$.

Задача 4. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

Задача 5. Имеется 10 отрезков, причем известно, что длина каждого — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Задача 6. На окружности радиуса 1 отмечено 100 точек. Докажите, что на окружности найдется такая точка, для которой сумма расстояний от нее до всех отмеченных точек будет больше 100.

Задача 7. Верно ли, что из любых 100 отрезков всегда можно выбрать несколько, таких что можно нарисовать многоугольник с такими сторонами?

Задача 8. При любом натуральном n из чисел a^n, b^n и c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел a, b и c есть два равных.

Задача 9. a, b и c — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Задача 10. На плоскости нарисована замкнутая ломаная. Если какие-то два звена AB и CD пересекаются, то разрешается заменить их одной из пар звеньев: AC и BD или AD и BC. Правда ли, что при помощи конечного числа таких операций можно получить замкнутую ломаную без самопересечений?

Тема IV. Инвариант

Задача 1. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

Задача 2. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Задача 3. Вера, Надя и Люба решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Может ли такое быть?

Задача 4. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна черная клетка?

Задача 5. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Задача 6. На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу). Докажите, что через 2007 секунд они не могут вернуться в исходное положение.

Задача 7. Хулиган Вася порвал стенгазету, причем каждый кусок он разрывал либо на 4, либо на 10 частей. Могло ли в конце получиться 2006 кусков?

Задача 8. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.

Задача 9. На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Задача 10. На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

Тема V. Принцип крайнего

Задача 1. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

Задача 2. По кругу записано несколько чисел, причем каждое равно среднему арифметическому соседних с ним чисел. Докажите, что все числа равны.

Задача 3. Доказать, что не существует попарно различных натуральных чисел k, l, m, n, для которых было бы справедливо равенство

$$k^k + l^l = m^m + n^n.$$

Задача 4. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на прямые, содержащие его стороны. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадет на сторону.

Задача 5. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трех). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

Задача 6. Восемь теннисистов провели круговой турнир. Докажите, что найдутся четыре теннисиста A, B, C, D, такие что A выиграл у B, C, D, B выиграл у C и D, C выиграл у D.

Задача 7. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник.

Задача 8. Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими своими концами упирался строго внутрь каких-то двух других отрезков?

Задача 9. На плоскости расставили 100 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 50 отрезков с вершинами в расставленных точках так, чтобы никакие два отрезка не пересекались.

Задача 10. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.