

Занятие №1. Вводное

Люберцы. 16 октября 2006 года

1. Представьте число 2006 в виде суммы пяти натуральных чисел, произведение которых делится на 10^{10} .
2. Произведение трех чисел оканчивается на 2006. Докажите, что их сумма не может равняться 9999?
3. Докажите, что из чисел 1, 2, 3, ..., 10 можно составить пять дробей, сумма которых будет целым числом.
4. Может ли в остроугольном треугольнике длина биссектрисы быть в два раза больше длины высоты, проведенной из той же вершины?
5. Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 2006 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?
6. Рома на каждой следующей перемене съедал конфет больше, чем на предыдущей и за все 5 перемен съел 31 конфету. Сколько конфет он мог съесть на четвертой перемене, если на первой съел в три раза меньше, чем на пятой?
7. Можно ли раскрасить клетки доски 8×8 в три цвета: 21 клетку в белый, 21 клетку — в синий, 22 — в красный цвет так, чтобы ни на одной диагонали (не только на двух главных, но и на любой параллельной им) не оказалось одновременно клеток всех трех цветов.
8. Вдоль дороги растут 2006 елей. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, с которого она взлетела. Могло ли так получиться, что на каждой ели вновь сидит по одной вороне?
9. Разрежьте прямоугольник 6×6 клеток на наибольшее число клетчатых прямоугольников, никакие два из которых не являются одинаковыми.
10. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ не больше стороны, с которой эта диагональ не имеет общих точек?
11. Окружность S , вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке K . Докажите, что оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABK , а вторая — в треугольник CBK не могут одновременно лежать на S .
12. Можно ли расставить числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3 так, что сумма любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, была простым числом?
13. На плоскости даны 11 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Два игрока по очереди проводят отрезки с концами в этих точках (из каждой точки может выходить любое количество отрезков, но каждые две точки можно соединять только один раз). Выигрывает тот игрок, после хода которого из каждой точки выходит хотя бы один отрезок (на этом игра заканчивается). Кто может обеспечить себе победу — начинающий, или его соперник?
14. На гранях восьми кубиков нарисованы кляксы: по одной кляксе на двух противоположных гранях кубиков, по две кляксы еще на двух противоположных гранях кубиков, и по три кляксы на двух оставшихся гранях. Из этих восьми кубиков сложили куб. Могло ли так оказаться, что число клякс на гранях полученного куба — шесть последовательных натуральных чисел?
15. В таблице 3×3 в центральной клетке стоит 0. Двое по очереди ставят в эту таблицу числа от 1 до 8 (каждое число можно использовать только один раз). Первый выигрывает, если после того, как в таблицу будут поставлены все числа, сумма чисел в какой-то строке, столбце или на какой-то из диагоналей делится на 9. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Занятие №2. Четность

Люберцы. 23 октября 2006 года

1. На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

2. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 13-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

3. Можно ли нарисовать 13-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

4. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

5. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

6. Квадратная таблица 25×25 раскрашена в 25 цветов так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все цвета. Докажите, что если расположение цветов симметрично относительно одной из диагоналей, то на этой диагонали тоже представлены все цвета.

7. Конь вышел с поля a1 шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

8. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

9. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1×2 так, чтобы свободными остались только клетки a1 и h8?

10. Найдите все пары простых чисел таких, что и их сумма, и их разность — тоже простые числа.

11. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 6 очков. Сколько очков на другом конце?

12. Из набора домино выбросили все кости с пустышками. Можно ли все оставшиеся кости выложить в ряд?

13. Кузнечик прыгает по прямой. В первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см, в третий — 3 см и так далее. Докажите, что после 2006 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

14. В классе 30 учеников и каждый день трое из них дежурят по классу. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

15. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

16. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих (либо легче, либо тяжелее). Петя выбрал одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

17. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

18. Можно ли выписать в ряд цифры от 1 до 9 по два раза каждую так, чтобы между единицами была одна цифра, между двойками — две, ..., между девятками было девять цифр?

Занятие №3. Принцип Дирихле

Люберцы. 30 октября 2006 года

1. Докажите, что если в 50 клетках сидит 51 кролик, то по крайней мере в одной клетке сидит не менее двух кроликов.
2. Докажите, что если в 10 клетках сидит 51 кролик, то по крайней мере в одной клетке сидит не менее шести кроликов.
3. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?
4. Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых кратна 5.
5. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2006.
6. Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.
7. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.
8. Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.
9. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа $-1, 0, 1$. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.
10. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
11. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
12. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
13. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.
14. Докажите, что в любой компании есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.
15. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Занятие №4. Неравенство треугольника

Люберцы. 13 ноября 2006 года

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что

$$AB + CD < AC + BD.$$

2. Докажите, что сумма длин диагоналей четырехугольника меньше, чем периметр, но больше полупериметра этого четырехугольника?

3. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырех домов была наименьшей?

4. a , b и c — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

5. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

6. Известно, что в треугольнике ABC угол A равен 60° . Докажите, что $AB + AC \leq 2BC$.

7. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

8. Имеется 10 отрезков, причем известно, что длина каждого — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

9. На окружности радиуса 1 отмечено 100 точек. Докажите, что на окружности найдется такая точка, для которой сумма расстояний от нее до всех отмеченных точек будет больше 100.

10. Даны 100 палочек. Верно ли, что из них можно выбрать несколько палочек, из которых можно сложить многоугольник?

11. При любом натуральном n из чисел a^n , b^n и c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел a , b и c есть два равных.

12. a , b и c — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

13. На плоскости нарисована замкнутая ломаная. Если какие-то два звена AB и CD пересекаются, то разрешается заменить их одной из пар звеньев: AC и BD или AD и BC . Правда ли, что при помощи конечного числа таких операций можно получить замкнутую ломаную без самопересечений?

14. У Федя есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т.д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Занятие №5. Инвариант

Люберцы. 20 ноября 2006 года

1. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

2. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

3. Вера, Надя и Люба решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Может ли такое быть?

4. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна черная клетка?

5. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

6. На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу). Докажите, что через 2007 секунд они не могут вернуться в исходное положение.

7. Хулиган Вася порвал стенгазету, причем каждый кусок он разрывал либо на 4, либо на 10 частей. Могло ли в конце получиться 2006 кусков?

8. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.

9. На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

10. На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

Занятие №6. Принцип крайнего

Люберцы. 27 ноября 2006 года

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырех прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата. Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.

2. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

3. По кругу записано несколько чисел, причем каждое равно среднему арифметическому соседних с ним чисел. Докажите, что все числа равны.

4. Доказать, что не существует попарно различных натуральных чисел k, l, m, n , для которых было бы справедливо равенство

$$k^k + l^l = m^m + n^n.$$

5. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на прямые, содержащие его стороны. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадет на сторону.

6. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трех). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

7. Восемь теннисистов провели круговой турнир. Докажите, что найдутся четыре теннисиста A, B, C, D , такие что A выиграл у B, C, D , B выиграл у C и D , C выиграл у D .

8. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник.

9. Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими своими концами упирался строго внутрь каких-то двух других отрезков?

10. На плоскости расставили 100 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 50 отрезков с вершинами в расставленных точках так, чтобы никакие два отрезка не пересекались.

Занятие №8. Раскраска

Люберцы. 11 декабря 2006 года

1. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?
2. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

3. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки .

4. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки .

5. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на прямоугольники 1×4 .

6. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратов 2×2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать еще хотя бы один такой же квадратик.

7. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше девяти.

8. Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нем любой прямоугольник из трех клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в черный, черные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в черный цвет?

9. Доска 8×8 разрезана на доминошки размером 1×2 клетки. Докажите, что количество горизонтальных доминошек четно.

10. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размерами 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2 . Вместо нее удалось достать плитку 1×4 . Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

11. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

12. В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 клетки и одна плитка 1×1 . Докажите, что плитка 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

13. На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвертое, так что они образуют квадратную сетку. Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.

14. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на n^2 треугольничков. Назовем цепочкой последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в цепочке?

Занятие №9. Полуинвариант

Люберцы. 18 декабря 2006 года

1. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B , оттуда — в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A , то путешественник никогда не вернется в город A .

2. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде “налево” некоторые повернулись налево, а остальные — направо. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, обращенных к нему лицом?

3. На материке есть несколько стран, в каждой из которых правит либо партия правых, либо партия левых. Раз в месяц в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти только в случае, если в большинстве стран, граничащих с этой страной, правит другая партия. Докажите, что смены партий не могут продолжаться бесконечно.

4. Несколько ребят сидят за круглым столом. У каждого из них есть некоторое четное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет сидящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечетное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

5. Квадратный лист бумаги разрезали по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезали на две части, и так много раз. Какое наименьшее число разрезов необходимо, чтобы среди полученных частей могло оказаться ровно 100 двадцатиугольников?

6. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трех получившихся кусков и т.д. Докажите, что после достаточного количества разрезов можно будет выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырехугольников и т.д.).

7. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

8. Круг разбит на 2006 секторов, в некоторых секторах стоят фишки — всего 2007 фишек. Затем берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что после нескольких таких операций не менее 1003 секторов будет занято.