

Задачи к зачету

1. Упростите при $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ выражение $\sqrt{a^2 - 2a + 1} + \sqrt{4a^2 + 4a + 1}$.

2. Сравните выражения:

$$\sqrt{7} - \sqrt{13} \quad \text{и} \quad \sqrt{11} - \sqrt{17}.$$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}.$$

4. Упростите выражение:

$$\frac{x - \sqrt{y}}{x + \sqrt{y}} + \frac{x^2 - x\sqrt{y}}{x - \sqrt{y}} - \frac{x + \sqrt{y}}{x - \sqrt{y}} + \frac{4x\sqrt{y}}{x^2 - y}.$$

5. Исследуйте на иррациональность выражение $\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + \sqrt{11}$.

6. Исследуйте на иррациональность выражение $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$.

7. Исследуйте функцию на четность–нечетность $f(x) = \frac{5x^2 + 7x^4 + |x|}{3x - x^3 + x^7}$.

8. Исследуйте функцию на четность–нечетность $f(x) = |x + 5| + |x - 2|$.

9. Решите уравнение $\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{6}{x^2 - 4x - 5} = \frac{1}{x-5}$.

10. Решите уравнение $3\sqrt{x+4} = 2x - 1$.

11. Найдите все значения параметра a при которых квадратное уравнение $(a-3)x^2 + (6-2a)x + 5 = 0$ имеет одно решение.

12. Пусть x_1 и x_2 — два корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Выразите через коэффициенты a , b и c значение выражения $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$.

13. Найдите уравнение общей касательной к двум параболам, заданным уравнениями $y = 2x^2 + 2x + 2$ и $y = 2x^2 + 3$.

14. Найдите максимальное значение функции f и значение переменной x , при котором оно достигается, если

$$f(x) = \frac{x^2}{8x^4 - x^2 + 2}.$$

15. Найдите максимальное значение функции f и значение переменной x , при котором оно достигается, если

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 20x + 27}.$$

16. Докажите, что при всех действительных x , y и z справедливо неравенство

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 12yz + 6xz - 4xy.$$

17. Докажите, что при всех действительных a , b и c справедливо неравенство

$$a^2 + 5b^2 + 4c^2 \geq 4ab + 4bc.$$

18. Найдите все значения переменной x , для которых справедливо неравенство

$$|x - 2| + |x - 4| + |x - 6| \leq 9.$$

19. Найдите все значения переменной x , для которых справедливо неравенство

$$|x - 2| + |2x - 6| \leq 8 - x.$$

20. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{2x-9} + \sqrt{\frac{4-x}{x^2-8x+15}}.$$

21. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{-\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}} + \frac{1}{2x-3}.$$

22. Найдите множество значений, принимаемых функцией

$$f(x) = 2 - \frac{1}{1 - \sqrt{3 - 2x - x^2}}.$$

23. Найдите множество значений, принимаемых функцией

$$f(x) = 3 - \frac{1}{2 - \sqrt{-6x - x^2}}.$$

24. Решите неравенство $\frac{x-1}{2a} \geq \frac{x-3}{a+2}$ в зависимости от значения параметра a .

25. Решите неравенство $\frac{x+1}{2a} \geq \frac{x+2}{a+3}$ в зависимости от значения параметра a .

26. Решите неравенство $ax^2 - 2x + a \geq 0$ в зависимости от значения параметра a .

27. Решите неравенство $ax^2 - 4x + 4 \geq 0$ в зависимости от значения параметра a .

28. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 8x - 7 < 0. \end{cases}$$

29. Решите совокупность неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq 0, \\ x^2 - 7x - 10 > 0. \end{cases}$$

30. Решите неравенство

$$\frac{(18 + 9x - 8x^2 - 4x^3)}{(9x^4 - 37x^2 + 4)(3x - 1)} \geq 0.$$

31. Нарисуйте график функции $f(x) = |2x+1| + 2|x-2|$, найдите точки пересечения с осями, исследуйте графики на монотонность и экстремумы.

32. Нарисуйте график функции $f(x) = \left| \frac{2|x| + 1}{1 - |x|} \right|$, найдите точки пересечения с осями, исследуйте график на монотонность, экстремумы и асимптоты.

33. При всех $a \in \mathbb{R}$ решите систему уравнений

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a; \\ (a-3)x + ay = -9. \end{cases}$$