

Задание 1.

Подобие треугольников. Теоремы косинусов и синусов

11в. 12 января 2004 года

1. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если длины оснований трапеции равны a и b .
2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны соответственно r_1 и r_2 . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6 см, боковые стороны AB и BC равны 5 см. Найдите расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис треугольника.
4. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведенной из вершины C , если длины сторон, лежащих против вершин A , B и C , равны соответственно a , b , c .
5. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и AC равны b , угол при вершине A равен 2α . Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D . Найдите длину отрезка BD .
6. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC . Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC , если $\frac{AN}{AC} = n$.

Задание 2.

Окружность. Аналитические методы решения задач

11в. 17 января 2004 года

1. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найдите площадь трапеции, если длины ее оснований равны a и b .
2. Окружность проходит через вершины B , C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке E . Найдите длину диагонали BD , если длины оснований трапеции равны a и b .
3. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC , касается основания BC в точке E и пересекает сторону AC в точке D . Найдите длину боковой стороны, если $DC = 3AD$.
4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту этого треугольника.
5. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , находится на расстоянии $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см от вершин A и B соответственно. Найдите катеты треугольника.
6. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и CA расположены точки A_1 , B_1 и C_1 так, что

$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{CA}.$$

Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

Задание 3.*Векторы на плоскости***11в. 19 января 2004 года**

1. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания BC к длине основания AD равно n . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Разложите вектор \overrightarrow{AO} по векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .

2. Даны три ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , любые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарен вектору \vec{c} , а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарен вектору \vec{a} .

3. Зная, что $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$, найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

4. Вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a} - 5\vec{b}$ и вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a} - 2\vec{b}$. Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

5. Единичные векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Вычислите

$$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a}).$$

6. В декартовой системе координат даны точки $A(3; 2)$, $B(5; 1)$ и $D(1; -2)$. Найдите длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$.