Задание 1.

Подобие треугольников. Теоремы косинусов и синусов

11в. 12 января 2004 года

1. Прямая, проходящая через точку пресечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если длины оснований трапеции равны a и b.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны соответственно r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6 см, боковые стороны AB и BC равны 5 см. Найдите расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис треугольника.

4. Найдите длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C, если длины сторон, лежащих против вершин A, B и C, равны соответственно a, b, c.

5. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и AC равны b, угол при вершине A равен 2α. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка BD.

6. Точка N лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABN и ABC, если $\dfrac{AN}{AC} = n$.

Задание 2.

Окружность. Аналитические методы решения задач

11в. 17 января 2004 года

1. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Надите площадь трапеции, если длины ее оснований равны a и b.

2. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найдите длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.

3. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину боковой стороны, если $DC = 3AD$.

4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту этого треугольника.

5. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, находится на расстоянии $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см от вершин A и B соответственно. Найдите катеты треугольника.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA расположены точки A_1, B_1 и C_1 так, что
$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{CC_1}{CA}.$$
Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

Задание 3.

Векторы на плоскости

11в. 19 января 2004 года

1. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания BC к длине основания AD равно n. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2. Даны три ненулевых вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, любые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{c}$, а вектор $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{a}$.

3. Зная, что $|\overrightarrow{a}| = 11$, $|\overrightarrow{b}| = 23$ и $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = 30$, найдите $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$.

4. Вектор $\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $7\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ и вектор $\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $7\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

5. Единичные векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ удовлетворяют условию $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$. Вычислите
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}).$$

6. В декартовой системе координат даны точки $A(3; 2)$, $B(5; 1)$ и $D(1; -2)$. Найдите длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$.

Задание 4.

Применение векторов в пространстве

11в. 24 января 2004 года

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, AC и DC_1 — диагонали его граней. На прямых AC и DC_1 выбрали точки M и N так, что $MN||BD_1$. Найдите отношение длин отрезков MN и BD_1.

2. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$, а точка P выбрана на ребре AD так, что $AP : AD = 2 : 3$. Найдите в каком отношении плоскость MNP делит ребро BC?

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина ребра $AA_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

4. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что ребра AC и BD перпендикулярны.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ с единичным ребром точки M и N — середины ребер AB и CD. Найдите длину отрезка MN.

6. В условиях предыдущей задачи найдите угол между прямыми MN и BC.

Задание 5.

Сечения многогранников

11в. 31 января 2004 года

1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Постройте сечение проходящее через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 и найдите его площадь.

2. На ребре AB тетраэдра $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : AB = \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью проходящей через точку M и

параллельной ребрам AD и BC. При каком λ это сечение будет ромбом, если $AD : BC = m$.

3. На ребрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M и N так, что $AM : AA_1 = m$, $CN : CC_1 = n$. Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали BD основания. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1.

4. На диагонали AB_1 грани ABB_1A_1 Треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположена точка M так, что $AM : MB_1 = 5 : 4$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M и параллельной диагоналям A_1C и BC_1 двух других граней. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1.

Задание 6.

Угол между прямой и плоскостью

11в. 2 февраля 2004 года

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину перпендикуляра, опущенного из вершины B_1 на плоскость AD_1C, если $AB = a$, $AA_1 = b$.

2. Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1 = AB$. Найдите угол между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

4. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение бокового ребра и стороны основания равно 2 ($AA_1 : AB = 2$). Найдите угол между диагональю BD_1 призмы и плоскостью BC_1D.

Задание 7.

Расстояния в пространстве

11в. 7 февраля 2004 года

1. Площадь боковой поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды равны соответственно S и V. Найдите расстояние от вершины основания пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите расстояние между прямыми AB и C_1M, где M — середина ребра AC.

3. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба с единичным ребром.

4. Определите, в каких отношениях основания общего перпендикуляра в предыдущей задаче делят эти диагонали.

Задание 8.

Двугранный угол

11в. 14 февраля 2004 года

1. Найдите величину двугранного угла в правильном тетраэдре.

2. Найдите величины всех двугранных углов правильной четырехугольной пирамиды, длины боковых ребер которой равны длинам ребер основания.

3. Правильный тетраэдр с ребром a склеили по грани с правильной четырехугольной пирамидой, боковая грань которой — правильный треугольник со стороной a. Сколько граней и ребер у получившегося многогранника?

4. Плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые. Найдите площадь основания ABC, если площади боковых граней равны S_1, S_2 и S_3.

Задание 9.

Углы в правильной пирамиде

11в. 16 февраля 2004 года

$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Угол между ребром SA и плоскостью ABC равен α, угол между плоскостями ABC и ABS равен β, $\angle ASB = \gamma$, двугранный угол при ребре AS равен δ.

1. Найдите связь между углами α и β.
2. Найдите связь между углами α и γ.
3. Найдите связь между углами α и δ.
4. Найдите связь между углами β и γ.
5. Найдите связь между углами β и δ.
6. Найдите связь между углами γ и δ.

Задание 10.

Тела вращения

11в. 21 февраля 2004 года

1. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь получившегося сечения.

2. Радиус основания конуса равен R, а длина высоты — H. Найдите длину ребра вписанного в него куба (одна из граней которого лежит в плоскости основания конуса).

3. Радиус основания конуса равен R, а длина высоты — H. В него вписана правильная треугольная призма (основание призмы лежит в плоскости конуса), у которой все ребра имеют одинаковую длину. Найдите длину ребра призмы.

4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине — α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.

5. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Найдите высоту пирамиды.

6. Найдите радиус шара, описанного около правильной n–угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

Задание 11.

Объемы многогранников

11в. 1 марта 2004 года

1. Каждое ребро параллелепипеда равно 1. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по α каждый. Найдите объем параллелепипеда.

2. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра длины a и b взаимно перпендикулярны, а ребро длины c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.

3. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота равна h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и угол между диагоналями основания равен γ.

4. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6, 6, и 8. Все боковые ребра равны 9. Найдите объем пирамиды.

Задание 12.

Объемы и площади поверхностей тел вращения

11в. 13 марта 2004 года

1. Полукруг свернули в коническую поверхность. Найдите объем образовавшегося конуса.

2. Найдите отношение между боковой и полной площадями поверхностей равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник).

3. Площадь основания конуса равна S, а образующие наклонены под углом α к основанию. Найдите площадь полной поверхности.

4. Шар радиуса 10 цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12. Найдите площадь полной поверхности тела.

5. Радиус шара 3. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 5.

6. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относятся объем общей части шаров к объему целого шара?