Задачи
по курсу профессора Е.С.Половинкина
"Выпуклый анализ".

Задача 1. *Показать, что для произвольных замкнутых множеств A и B из банахова пространства E сумма (по Минковскому) этих множеств $A+B$ может оказаться не замкнутым множеством. Доказать, что если одно из этих множеств является компактом, то множество $A+B$ замкнуто. Доказать, что если оба множества A и B компактны, то сумма $A+B$ также компакт.*

Задача 2. *Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и его внутренность $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Доказать, что множество $\operatorname{int} A$ выпукло и всюду плотно в $\overline{A}$.*

Задача 3. *Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутости множества $\operatorname{co} A$ даже на плоскости $\mathbb{R}^2$.*

Задача 4. *Пусть A, B, C, D — замкнутые множества из банахова пространства E_1, $T : E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$, $h(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Доказать, что справедливы неравенства*

$$h(A+B, C+D) \leq h(A,C) + h(B,D), \quad h(\alpha A, \alpha B) \leq |\alpha| h(A,B),$$
$$h(\alpha A, \beta A) \leq |\alpha - \beta| \|A\|, \quad h(TA, TB) \leq \|T\| h(A,B),$$
$$h(\operatorname{co} A, \operatorname{co} B) \leq h(A,B), \quad h(\overline{\operatorname{co}}\, A, \overline{\operatorname{co}}\, B) \leq h(A,B).$$

Задача 5. *Показать, что имеет место включение*

$$T_{\text{н}}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k; 0\right) \subset \bigcap_{k=1}^{m} T_{\text{н}}(A_k; 0),$$

и при этом оно может быть строгим.

Задача 6. *Найти все (нижний, верхний, Кларка, асимптотический нижний и асимптотический верхний) касательные конусы в точке* $0 \in \mathbb{R}^2$ *для множества* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < |x|, x \in (-\infty, +\infty)\}$.

Задача 7. *Доказать, что дифференцируемая функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *выпукла тогда и только тогда, когда для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle$.

Задача 8. *Найти опорную функцию: а) отрезка* $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, *б) n-мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат и центром в нуле.*

Задача 9. *Найти функцию Минковского эллипсоидального тела вида*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Задача 10. *Доказать, что замкнутое множество* A *в банаховом пространстве* E *является выпуклым тогда и только тогда, когда функция* $x \to \varrho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ *выпукла.*

Задача 11. *Привести пример выпуклой функции* $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$, *где* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, *которая в точке (1;0) не пн. сн. и не пн. св.*

Задача 12. *Доказать, что в* $\mathbb{R}^n$ *всякая выпуклая функция* f *непрерывна на множестве* $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

Задача 13. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое выпуклое множество,* $T = [0; 1]$. *Функция* $f : T \times U \to \mathbb{R}$ *обладает свойствами: 1)* $\forall t \in T$ *функция* $x \to f(t, x)$ *выпукла и 2)* $\forall x \in U$ *функция* $t \to f(t, x)$ *непрерывна. Доказать, что* f *непрерывна по совокупности переменных на* $T \times U$.

Задача 14. *Доказать, что непустые множества* A *и* B *из банахова пространства* E *отделимы функционалом* $p \in E^* \backslash \{0\}$ *тогда* *и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$s(p, A) + s(-p, B) \leq 0.$$

Задача 15. *Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $x, y \notin A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство $\|P_A x - P_A y\| \leq \|x - y\|$.*

Задача 16. *Показать, что для функции $\varphi(t) = (1/\alpha)|t|^\alpha$ функция $\varphi^*(t) = (1/\beta)|t|^\beta$, где $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, является сопряженной.*

Задача 17. *Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^* = f$ возможно лишь для функции $f(x) = \|x\|^2/2$.*

Задача 18. *Показать, что для выпуклой, собственной пн.сн. функции f справедливо равенство $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -f^*(0)$.*

Задача 19. *Найти сопряженную функцию f^* для функции*
1) $f(x_1, , x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$;
2)$f(x_1, , x_2) = |x_1| + |x_2|$;
3) $f(x_1, , x_2) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + 1}$.

Задача 20. *Показать, что неравенство $s(p, A) \leq s(p, B)$ $\forall p$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \subset \overline{\operatorname{co}} B$.*

Задача 21. *Показать, что* $s\left(p, \bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right) = \sup\limits_\alpha s(p, A_\alpha)$.

Задача 22. *Множество A замкнуто и $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} A$. Доказать, что $s(p, A) > \langle p, x \rangle$ $\forall p \in E^* \backslash \{0\}$.*

Задача 23. *Множества A, D замкнуты, а множество B ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения $A + B \subset B + D$ следует включение $A \subset \overline{\operatorname{co}} D$.*

Задача 24. *Доказать формулу*

$$\overline{\operatorname{co}} A = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leq s(p, A)\}.$$

Задача 25. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— липшицевая функция с константой* $L > 0$, *а функция* $\operatorname{co} f$ *— собственная. Доказать, что функция* $\operatorname{co} f$ *также является липшицевой с той же константой* L.

Задача 26. *Доказать, что для любых функций* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *верно неравенство* $\operatorname{co} f + \operatorname{co} g \le \operatorname{co}(f + g)$. *Доказать, что если функция* g *является аффинной, т.е.* $g(x) = \langle p, x\rangle + \alpha$, *то указанное неравенство превращается в равенство.*

Задача 27. *Показать (построив соответствующие примеры), что для различных точек границы* $\partial \operatorname{dom} f$ *эффективного множества функции* f *может оказаться, что* $\partial f(x) \neq \emptyset$, *так и* $\partial f(x) = \emptyset$.

Задача 28. *Найти субдифференциал функции* $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| + 1$ *при всех* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Задача 29. *Найти субдифференциал функции* $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1| + |x_2|,\ 1.2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ *в точке* $(0, 0)$.

Задача 30. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт. Как субдифференциал опорной функции* $s(p, A)$ *в произвольной точке* $p \neq 0$ *связан со множеством* A? *В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?*

———————————————————————————

Задача 31. *(*) Привести пример невыпуклого множества* A *из банахова пространства, удовлетворяющего условию: для любых точек* $x_1, x_2 \in A$ *справедливо включение* $\frac{x_1+x_2}{2} \in A$. *Показать, что если замкнутое множество* A *удовлетворяет приведенному выше условию, то оно является выпуклым.*

Задача 32. *(*) Пусть даны произвольные выпуклые множества* $M, A, B \subset E$ *и числа* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Доказать, что справедливо* *равенство*

$$\Big(\big((M+\alpha A)\overset{*}{-}\alpha B\big)+\beta A\Big)\overset{*}{-}\beta B=(M+(\alpha+\beta)A)\overset{*}{-}(\alpha+\beta)B.$$

Задача 33. *(*) Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из $\mathbb{R}^n$ существует по меньшей мере одна точка такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.*

Задача 34. *(*) Пусть даны выпуклое ограниченное тело $A\subset\mathbb{R}^n$, вектор $q\in\mathbb{R}^n$, $q\neq 0$, и гиперплоскость $H=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\langle q,x\rangle=0\}$. Каждая прямая $l_a=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x=a+\lambda q\}$, где $a\in H$, пересекающая множество A, дает в пересечении отрезок (или точку) $[b_a,c_a]=l_a\bigcap A$, причем $b_a=a+\lambda_1 q$, $c_a=a+\lambda_2 q$ и $\lambda_1\leq\lambda_2$. Выбирая по всем таким прямым l_a вместо отрезка $[b_a,c_a]$ отрезок*

$$\left[a+\frac{b_a-c_a}{2},a+\frac{c_a-b_a}{2}\right],$$

получаем в совокупности множество $\tilde{A}$, симметричное относительно гиперплоскости H. Доказать, что множество $\tilde{A}$ является выпуклым телом, и что диаметр множества $\tilde{A}$ не превосходит диаметра множества A.

Задача 35. *(*) Доказать равенство*

$$T_{\text{н}}(A;a)=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{0<\lambda<\delta}\left(\frac{1}{\lambda}(A-a)+B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 36. *(*) Доказать равенство*

$$T_{\text{в}}(A;a)=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{\delta>0}\bigcup_{0<\lambda<\delta}\left(\frac{1}{\lambda}(A-a)+B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 37. *(*) Доказать равенство*

$$T_C(A;a)=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{0<\lambda<\delta}\bigcap_{b\in A\bigcap B_\delta(a)}\left(\frac{1}{\lambda}(A-b)+B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 38. *(*) Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ опорная функция всякой окружности $O_R(a,q) = \partial B_R(a) \bigcap H_q(a)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^3$, лежащая в гиперплоскости $H_q(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle q, x\rangle = \langle q, a\rangle\}$, где $q \neq 0$, для любого вектора $p \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле*

$$s(p, O_R(a,q)) = R\|p \times q\| + \langle p, a\rangle,$$

где $p \times q$ означает векторное произведение векторов p и q.

Задача 39. *(*) Найти опорную функцию эллипсоидального тела вида*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Задача 40. *(*) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на X. Доказать, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in X$ квадратичная форма*

$$k(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \, \partial x_j} p_i p_j$$

неотрицательна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Задача 41. *(*) Доказать, что функция $f : l_2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x_n^2$ является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из* $\mathrm{dom}\, f$, *и поэтому она разрывна в каждой точке из* $\mathrm{dom}\, f$.

Задача 42. *(*) Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы* $0 \notin \mathrm{int}\ (A + (-B))$.

Задача 43. *(*) Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было сильно отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \overline{A + (-B)}$.*

Задача 44. *(*) Пусть в пространстве l_2 задано множество*

$$A = \{x \in l_2 \,|\, |x_k| \leq 1/k, \forall k\}.$$

- "гильбертов кирпич". Доказать, что множество A является выпуклым компактным множеством и что через его граничную точку $0 \in A$ нельзя провести гиперплоскость, опорную ко множеству A. Доказать, что для любой точки $x \notin A$ справедливо неравенство $\|x\| > \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$.

Задача 45. *(*) Пусть непустое множество A из $\mathbb{R}^n$ задано в виде*

$$A = \bigcap_{k=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x\rangle \leq \alpha_k\},$$

где $\|p_k\| = 1$ для всех $k \in \overline{1, m}$. Доказать, что множество A есть многогранник (т.е. ограничено) тогда и только тогда, когда

$$0 \in \operatorname{int} \left(\operatorname{co} \bigcup_{k=1}^{m} \{p_k\}\right).$$

Задача 46. *(*) Доказать формулу*

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leq s(p, A) - s(p, B)\}.$$

Задача 47. *(*) Доказать формулу*

$$s(p, A \overset{*}{-} B) = \overline{\operatorname{co}}\,(s(p, A) - s(p, B)).$$

Задача 48. *(*) Пусть A — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \operatorname{int} A$, пусть $\mu(x, A)$ — его функция Минковского и пусть $\mu'(x_0, A)(y)$ — ее производная в точке x_0 по направлению y. Доказать, что для любой точки $x_0 \in \partial A$ справедливо равенство*

$$T_{\text{н}}(A, x_0) = \{y \mid \mu'(x_0, A)(y - x_0) \leq 0\}.$$

Задача 49. *(*) Показать, что для того, чтобы субдифференциал функции f в точке x был непустым множеством, необходимо, чтобы функция f была полунепрерывна снизу в точке x. Показать, что это условие не является достаточным.*