Задачи
по курсу профессора Е.С.Половинкина
"Выпуклый анализ".

Задача 1. *Доказать, что для произвольных множеств A и B из банахова пространства E выполнено включение $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Показать, что данное включение нельзя в общем случае заменить на равенство.*

Задача 2. *Пусть даны компактное множество A и замкнутое множество B в банаховом пространстве E. Доказать, что множество $A + B$ замкнуто. Доказать, что если A и B компактны, то сумма $A + B$ также компакт.*

Задача 3. *Пусть множество A из банахова пространства E выпукло и* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. *Доказать, что множество* $\operatorname{int} A$ *выпукло и всюду плотно в* $\overline{A}$.

Задача 4. *Привести пример невыпуклого множества A из банахова пространства, но такого, что для любых $x_1, x_2 \in A$ справедливо включение $\frac{x_1+x_2}{2} \in A$. Показать, что если A дополнительно замкнуто, то множество A выпуклое.*

Задача 5. *Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутости множества* $\operatorname{co} A$ *даже на плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Задача 6. *Пусть S_n есть n -мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что* $\operatorname{int} S_n \neq \emptyset$.

Задача 7. *Пусть даны произвольные выпуклые множества $M, A, B \subset E$ и числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Доказать, что справедливо* *равенство*

$$\Big(\big((M+\alpha A) \overset{*}{-} \alpha B\big) + \beta A\Big) \overset{*}{-} \beta B = (M+(\alpha+\beta)A) \overset{*}{-} (\alpha+\beta)B.$$

Задача 8. *Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из $\mathbb{R}^n$ существует по меньшей мере одна точка такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.*

Задача 9. *Пусть даны выпуклое ограниченное тело $A \subset \mathbb{R}^n$, вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, и гиперплоскость $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, x\rangle = 0\}$. Каждая прямая $l_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + \lambda q\}$, где $a \in H$, пересекающая множество A, дает в пересечении отрезок $[b_a, c_a] = l_a \bigcap A$, причем $b_a = a + \lambda_1 q$, $c_a = a + \lambda_2 q$ и $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Выбирая по всем таким прямым l_a вместо отрезка $[b_a, c_a]$ отрезок*

$$\left[a + \frac{b_a - c_a}{2}, a + \frac{c_a - b_a}{2}\right],$$

получаем в совокупности множество $\tilde{A}$, симметричное относительно гиперплоскости H. Доказать, что множество $\tilde{A}$ является выпуклым телом, и что диаметр множества $\tilde{A}$ не превосходит диаметра множества A.

Задача 10. *Пусть A, B, C, D замкнутые множества из банахова пространства E_1, $T : E_1 \to E_2$ непрерывный линейный оператор, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$. Доказать, что справедливы неравенства*

$$h(A+B, C+D) \leq h(A,C) + h(B,D), \quad h(\alpha A, \alpha B) \leq |\alpha| h(A,B),$$
$$h(\alpha A, \beta A) \leq |\alpha - \beta| \|A\|, \quad h(TA, TB) \leq \|T\| h(A,B),$$
$$h(\operatorname{co} A, \operatorname{co} B) \leq h(A,B), \quad h(\overline{\operatorname{co}}\, A, \overline{\operatorname{co}}\, B) \leq h(A,B).$$

Задача 11. *Пусть даны компакты $A, B \subset E$, причем $B \subset A$. Определим через $\mathcal{K}(A,B)$ пространство компактных подмножеств X таких, что $B \subset X \subset A$ с метрикой Хаусдорфа. Доказать, что пространство $\mathcal{K}(A,B)$ является компактным.*

Задача 12. *Для любых множеств* $A, B \subset E$ *определим функцию* $h_1(A,B) = \sup\limits_{x\in A} \varrho(x,B) + \sup\limits_{x\in B} \varrho(x,A)$. *Показать, что функция* h_1 *является метрикой, топологически эквивалентной* h.

Задача 13. *Показать, что имеет место включение*

$$T_{\text{н}}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k; 0\right) \subset \bigcap_{k=1}^{m} T_{\text{н}}(A_k; 0),$$

и при этом оно может быть строгим.

Задача 14. *Доказать равенство*

$$T_{\text{н}}(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A-a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 15. *Доказать равенство*

$$T_{\text{в}}(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A-a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 16. *Доказать равенство*

$$T_C(A; a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \bigcap_{b\in A\bigcap B_\delta(a)} \left(\frac{1}{\lambda}(A-b) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Задача 17. *Определить все касательные конусы в точке* $0 \in \mathbb{R}^2$ *для множества* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|, x \in (-\infty, +\infty)\}$.

Задача 18. *Показать, что множество*

$$O^+A = \{y \in E \mid \forall x \in A\ \forall \lambda \geq 0, \quad x + \lambda y \in A\}.$$

является выпуклым конусом. Привести пример множества A, *у которого его асимптотический конус* O^+A *не замкнут.*

Задача 19. *Привести пример неограниченного замкнутого выпуклого множества в* l_2, *для которого* $O^+A = \{0\}$.

Задача 20. *Доказать, что дифференцируемая функция* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *выпукла тогда и только тогда, когда для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y\rangle$.

Задача 21. *Пусть выпуклое ограниченное и центрально-симметричное (относительно нуля) множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *таково, что* $0 \in \operatorname{int} A$ *и пусть* $\mu(x, A)$ *— его функция Минковского . Показать, что функция* $\varrho(x, y) = \mu(x - y, A)$ *определяет функцию расстояния.*

Задача 22. *Найти опорную функцию: а) отрезка* $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$*, б)* n*-мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат и центром в нуле.*

Задача 23. *Вычислить функцию Минковского и опорную функцию эллипсоида вида*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Задача 24. *Доказать, что в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *опорная функция всякой окружности* $O_R(a, q) = \partial B_R(a) \bigcap H_q(a)$ *радиуса* $R > 0$ *с центром в точке* $a \in \mathbb{R}^3$*, лежащая в гиперплоскости* $H_q(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, x \rangle = \langle q, a \rangle\}$*, где* $q \neq 0$*, для любого вектора* $p \in \mathbb{R}^3$ *вычисляется по формуле*

$$s(p, O_R(a, q)) = R\|p \times q\| + \langle p, a \rangle,$$

где $p \times q$ *означает векторное произведение векторов* p *и* q*.*

Задача 25. *Доказать, что замкнутое множество* A *в банаховом пространстве* E *является выпуклым тогда и только тогда, когда функция* $x \to \varrho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ *выпукла.*

Задача 26. *Привести пример невыпуклой функции* f*, удовлетворяющей условию*

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y), \quad \forall x, y. \tag{0.1}$$

Показать, что если функция f *непрерывна и выполнено условие (0.1), то она выпукла.*

Задача 27. *Доказать, что функция* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *вида* $f(x) = 32\|x\| - \|Tx\|$ *выпукла, где матрица* T *имеет вид*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 28. *Привести пример выпуклой функции* $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$, *где* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, *которая в точке (1;0) не пн. сн. и не пн. св.*

Задача 29. *Доказать, что в* $\mathbb{R}^n$ *всякая выпуклая функция* f *непрерывна на множестве* $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

Задача 30. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое выпуклое множество,* $T = [0; 1]$. *Функция* $f : T \times U \to \mathbb{R}$ *обладает свойствами: 1)* $\forall t \in T$ *функция* $x \to f(t, x)$ *выпукла и 2)* $\forall x \in U$ *функция* $t \to f(t, x)$ *непрерывна. Доказать, что* f *непрерывна по совокупности переменных на* $T \times U$.

Задача 31. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое выпуклое множество. Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема на* X. *Доказать, что функция* f *выпукла тогда и только тогда, когда для любого* $x_0 \in X$ *квадратичная форма*

$$k(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \, \partial x_j} p_i p_j$$

неотрицательна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Задача 32. *Доказать, что функция* $f : l_2 \to \mathbb{R}$ *вида* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x_n^2$ *является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из* $\operatorname{dom} f$, *и поэтому она разрывна в каждой точке из* $\operatorname{dom} f$.

Задача 33. *Доказать, что непустые множества* A *и* B *из банахова пространства* E *отделимы функционалом* $p \in E^* \backslash \{0\}$ *тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$s(p, A) + s(-p, B) \leq 0.$$

Задача 34. *Доказать, что непустые множества A и B из банахова пространства E сильно отделимы функционалом $p \in E^* \backslash \{0\}$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$s(p, A) + s(-p, B) < 0.$$

Задача 35. *Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $x, y \notin A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство $\|P_A x - P_A y\| \leq \|x - y\|$.*

Задача 36. *Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \text{int } (A + (-B))$.*

Задача 37. *Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было сильно отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \overline{A + (-B)}$. Это эквивалентно тому, что $\inf\{\|x - y\| \mid x \in A, \ y \in B\} > 0$.*

Задача 38. *Опираясь на то, что для неограниченных замкнутых множеств возможно $A - B \neq \overline{A - B}$, предъявить два замкнутых выпуклых множества из $\mathbb{R}^2$, которые можно разделить строго, но нельзя сильно.*

Задача 39. *Пусть в пространстве l_2 задано множество*

$$A = \{x \in l_2 \,|\, |x_k| \leq 1/k, \forall k\}.$$

- "гильбертов кирпич". Доказать, что множество A является выпуклым компактным множеством и что через его граничную точку $0 \in A$ нельзя провести гиперплоскость, опорную ко множеству A. Доказать, что для любой точки $x \notin A$ справедливо неравенство $\|x\| > \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$.

Задача 40. *Найти несколько граничных точек "гильбертова кирпича", через которые можно провести опорную гиперплоскость.*

Задача 41. *Показать, что если $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество , то в ∂A существует плотное подмножество точек, через которые можно провести опорную гиперплоскость.*

Задача 42. *Пусть линейно связный компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является локально выпуклым, т.е. $\forall x \in A$ $\exists \varepsilon(x) > 0$ такое, что каждое множество $B_{\varepsilon(x)}(x) \bigcap A$ выпукло. Доказать, что множество A выпукло.*
Указание: доказать, что без ограничения общности можно считать, что $0 \in A$ и в линейной оболочке множества A выполнены условия $\mathrm{int}\ A \neq \emptyset$ и $A = \overline{\mathrm{int}\ A}$. Далее воспользоваться следующим свойством выпуклых множеств: если C — выпуклое замкнутое ограниченное множество, для любых $x \in \mathrm{int}\ C$ и $y \in \partial B_1(0)$ определим луч $l_x = \{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ и точку $z = l_x \bigcap \partial C$, тогда $\{z + \lambda y \mid \lambda > 0\} \bigcap C = \emptyset$.

Задача 43. *Показать, что для функции $\varphi(t) = (1/\alpha)|t|^\alpha$ функция $\varphi^*(t) = (1/\beta)|t|^\beta$, где $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, является сопряженной.*

Задача 44. *Показать справедливость неравенства Фенхеля:*

$$\langle p, x \rangle \leq f(x) + f^*(p), \quad \forall x \in E, \ p \in E^*.$$

Задача 45. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать неравенство*

$$\int\limits_a^b f(x(t))\, dt \geq (b-a) f \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b x(t)\, dt \right).$$

Указание. Проинтегрировать неравенство Фенхеля $f(x(t)) \geq \langle y, x(t) \rangle - f^*(y)$.

Задача 46. *Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^* = f$ возможно лишь для функции $f(x) = \|x\|^2/2$.*

Задача 47. *Показать, что для выпуклой, собственной пн.сн. функции f справедливо равенство $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -f^*(0)$.*

Задача 48. *Найти сопряженную функцию f^* для функции*
1) $f(x_1, , x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$*;*
2)$f(x_1, , x_2) = |x_1| + |x_2|$;
3) $f(x_1, , x_2) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + 1}$.

Задача 49. *Показать, что если* $s(p, A) \leq s(p, B)$ $\forall p$, *то* $A \subset \overline{\text{co}}\, B$.

Задача 50. *Показать, что* $s\left(p, \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right) = \sup\limits_{\alpha} s(p, A_\alpha)$.

Задача 51. *Множество* A *замкнуто и* $x \in \text{int co}\, A$. *Доказать, что* $s(p, A) > \langle p, x\rangle$ $\forall p \in E^* \backslash \{0\}$.

Задача 52. *Множества* A, D *замкнуты, а множество* B *ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения* $A + B \subset B + D$ *следует включение* $A \subset \overline{\text{co}}\, D$.

Задача 53. *Доказать формулу*

$$\overline{\text{co}}\, A = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leq s(p, A)\}.$$

Задача 54. *Доказать формулу*

$$A \stackrel{*}{-} B = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leq s(p, A) - s(p, B)\}.$$

Задача 55. *Доказать формулу*

$$s(p, A \stackrel{*}{-} B) = \overline{\text{co}}\, (s(p, A) - s(p, B)).$$

Задача 56. *Пусть непустое ограниченное множество* A *задано выражением*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 1\},$$

где функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является аналитической относительно переменных* $(x_1, \ldots, x_n)$, *причем в любой граничной точке* x_0 *множества* A *градиент* $\nabla f(x_0) \neq 0$, *а для любого направления* $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq 0$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}(x_0) > 0.$$

Доказать, что множество A является строго выпуклым множеством.
Указание: показать, что в каждой граничной точке множества A существует опорная (касательная) гиперплоскость, и что множество $A \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ содержится в опорном полупространстве. Далее воспользоваться задачей 42.

Задача 57. *Пусть непустое множество A из $\mathbb{R}^n$ задано в виде*

$$A = \bigcap_{k=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x \rangle \leq \alpha_k\},$$

где $\|p_k\| = 1$ для всех $k \in \overline{1,m}$. Доказать, что множество A есть многогранник тогда и только тогда, когда

$$0 \in \operatorname{int} \left(\operatorname{co} \bigcup_{k=1}^{m} \{p_k\} \right).$$

Задача 58. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицевая функция с константой $L > 0$, а функция $\operatorname{co} f$ — собственная. Доказать, что функция $\operatorname{co} f$ также является липшицевой с той же константой L.*

Задача 59. *Доказать, что для любых функций $f, g : E \to \mathbb{R}$ верно неравенство $\operatorname{co} f + \operatorname{co} g \leq \operatorname{co}(f + g)$.*

Задача 60. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — строго выпуклый компакт (т.е. граница M не содержит отрезков) и компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таков, что $M \overset{*}{-} A = \{0\}$ (напомним, что последнее означает, что $A \subset M$ и нельзя сдвинуть компакт A на некоторый вектор $a \neq 0$ так, чтобы этот сдвиг $A + a$ также содержался в M).*
1. Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^k \subset A$, $2 \leq k \leq n + 1$, такие, что $M \overset{*}{-} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{a_i\} = \{0\}$.
2. Будет ли это утверждение верно в случае, когда выпуклый компакт не является строго выпуклым (например, многогранник)?

Задача 61. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} A$. Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^k \subset A$, где $k \leq 2n$, такие, что $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{a_i\}$.*

Задача 62. *Привести в* $\mathbb{R}^2$ *пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.*

Задача 63. *Пусть* A *— выпуклый компакт из* $\mathbb{R}^n$*, причем* $0 \in \operatorname{int} A$*, пусть* $\mu(x, A)$ *— его функция Минковского и пусть* $\mu'(x_0, A)(y)$ *— ее производная в точке* x_0 *по направлению* y*. Доказать, что для любой точки* $x_0 \in \partial A$ *справедливо равенство*

$$T_{\text{н}}(A, x_0) = \{y \mid \mu'(x_0, A)(y - x_0) \leq 0\}.$$

Задача 64. *Показать (построив соответствующие примеры), что для различных точек границы* $\partial \operatorname{dom} f$ *эффективного множества функции* f *может оказаться, что* $\partial f(x) \neq \emptyset$*, так и* $\partial f(x) = \emptyset$.

Задача 65. *Найти субдифференциал функции* $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| + 1$ *при всех* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Задача 66. *Найти субдифференциал функции* $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1| + |x_2|,\ 1.2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ *в точке* $(0, 0)$.

Задача 67. *Показать, что для того, чтобы субдифференциал функции* f *в точке* x *был непустым множеством необходимо, чтобы функции* f *была полунепрерывна снизу в точке* x*. Показать, что это условие не является достаточным.*

Задача 68. *Какое множество описывает субдифференциал опорной функции* $s(p, A)$ *при* $p \neq 0$*, где* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт. В каком случае субдифференциал опорной функции является одноточечным множеством во всех точках границы множества?*

Задача 69. *Доказать, что у выпуклого компакта из* $\mathbb{R}^2$ *множество крайних точек замкнуто. Показать, что у произвольного (не выпуклого) компакта из* $\mathbb{R}^2$ *множество крайних точек может быть не замкнуто.*

Задача 70. *Привести пример выпуклого компакта из* $\mathbb{R}^3$*, у которого множество крайних точек не замкнуто ("подстыкуйте" два подходящих конических тела).*

Задача 71. *Показать, что если выпуклое замкнутое множество из* $\mathbb{R}^n$ *содержит в качестве подмножества прямую (т.е. одномерное аффинное подмножество), то оно не содержит крайних точек.*

Задача 72. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— компакт,* $B \subset \operatorname{co} A$ *— компакт и* $x \in \operatorname{extr} A \backslash B$*. Доказать, что* $x \notin \operatorname{co} B$*.*

Задача 73. *Показать, что замкнутый единичный шар в пространстве суммируемых функций* $L_1([0,1])$ *не имеет крайних точек.*

Задача 74. *Показать, что шар в пространстве непрерывных функций над вещественным полем скаляров* $C([0,1])$ *имеет только две крайние точки — функции-константы* -1 *и* 1*.*

Задача 75. *С помощью теоремы Банаха-Алаоглу и теоремы Крейна-Мильмана доказать, что не существует банахова пространства, сопряженным к которому являются пространства* $L_1([0,1])$ *или* $C([0,1])$*.*