Г. Н. Яковлев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(Задачи и упражнения)

МФТИ, 2002

Рецензент: Г.Л. Луканкин
д.ф.м.н., чл.-корр. РАО

Аннотация

Настоящее пособие является продолжением учебно-методического пособия «Введение в математический анализ». Оно содержит упражнения и задачи на производные и на исследование функций с помощью производных. В начале каждого раздела приводятся определения основных понятий и формулировки основных утверждений, относящихся к дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Более подробные разъяснения и доказательства можно найти в учебном пособии Г.Н. Яковлева «Лекции по математическому анализу», часть 1.

Следует отметить, что в пособии почти нет тренировочных задач, и поэтому оно не может быть рекомендовано в качестве единственного сборника задач и упражнений.

Глава 1
Производные, дифференциалы и первообразные

§ 1. Определения производных и дифференциалов

Предел разностного отношения
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1}$$
при $h \to 0$ называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Заметим, что этот предел может быть как конечным, так и бесконечным, равным $+\infty$ или $-\infty$. Кроме того, рассматриваются и односторонние пределы: при $h \to +0$ и при $h \to -0$.

Предел отношения (1) при $h \to +0$ ($h \to -0$) называется правой (левой) производной функции f в точке x_0 и обозначается ${f_+}'(x_0)$ (соотв. ${f_-}'(x_0)$).

Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Пусть D'_f — множество точек, в которых функция f имеет конечную производную. Тогда функция, которая каждому $x \in D'_f$ ставит в соответствие число $f'(x)$, называется производной функции $y = f(x)$ и обозначается f' или y'.

Доказать следующие утверждения:

1. $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $(|x|)' = \operatorname{sgn} x \quad \forall x \neq 0$.

3. $(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $(a^x)' = a^x \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$.

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x} \log_a e \quad \forall x > 0; \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

Как понимать эти формулы? В частности, что обозначает x в разных частях равенства?

6. Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\exists A: \ \ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\Delta x)$$

при $x \to x_0$.

7. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки x_0 и непрерывная в точке x_0, имеет касательную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она в точке x_0 имеет производную, конечную или бесконечную, равную $+\infty$ или $-\infty$.

8. Какие точки графика функции $y = f(x)$ называются точками возврата?

9. Что называется второй производной функции f в заданной точке? Как определяется производная n-го порядка?

10. Что называется вторым дифференциалом функции f в заданной точке? Как определяется дифференциал n-го порядка?

11. При каких значениях α функцию $f(x) = |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{x}$ можно доопределить в точке $x = 0$ так, чтобы она в этой точке имела производную?

12. Доказать, что если дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (-l; l)$, четная (нечетная), то $f'(x)$ нечетная (четная).

13. Доказать, что если дифференцируемая функция $f(x)$ периодическая, то $f'(x)$ тоже периодическая.

§ 2. Правила дифференцирования

1. При каких условиях для функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0 справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = vdu + udv,$$
$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}?$$

2. Сформулировать правило дифференцирования сложной функции.

3. Чему равна производная обратимой функции, у которой обратная функция имеет производную?

4. Доказать формулы:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Когда функция $y = f(x)$ называется функцией, заданной параметрически? По какой формуле вычисляется ее производная?

6. Написать формулу Лейбница для n-й производной от произведения двух функций.

7. Какое свойство первого дифференциала называется свойством инвариантности формы? Обладает ли этим свойством дифференциал 2-го порядка?

8. Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

9. Доказать, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

10. Доказать, что любая функция $y = \varphi(x)$, $x \in$ $\in (a; b)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = f(y)$, бесконечно дифференцируема на интервале $(a; b)$, если функция $f(y)$ определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

11. При каких значениях α функцию $f(x) = |x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$ можно доопределить в точке $x = 0$ так, чтобы она имела непрерывную производную?

12. Доказать, что функция $f(x) = \sin x + \cos \pi x$ не является периодической.

§ 3. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Для данной функции f точка $x_0 \in D_f$ называется точкой максимума (минимума), если
$\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0) \cap D_f \quad f(x) \leqslant f(x_0)($ соотв., $f(x) \geqslant f(x_0))$.
Точки максимума и минимума функции называются ее точками экстремума, а ее значения в этих точках — экстремальными значениями.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и x_0 — ее точка экстремума, то, очевидно, $f'(x_0) = 0$ (теорема Ферма).

Отсюда следует, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и, кроме того, $f(a) = f(b)$, то

$$\exists \xi \in (a; b) : \ f'(\xi) = 0$$

(теорема Ролля).

А если $f(a) \neq f(b)$, то

$$\exists \xi \in (a; b) : \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(теорема Лагранжа).

Обобщением этих теорем является следующее утверждение:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$ и $g'(x) \neq 0$ на $(a; b)$, то

$$\exists \xi \in (a; b) : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(теорема Коши).

Доказать следующие утверждения:

1. Если функция непрерывна на некотором промежутке и всюду, кроме конечного числа точек, имеет равную нулю производную, то эта функция постоянна на рассматриваемом промежутке.

2. Если все корни многочлена $P_n(x)$ степени n действительны, то любое уравнение $P_n^{(k)}(x) = 0$, $k = 1,2,...,n-1$, имеет действительный корень.

3. Если функция $f(x)$ дифференцируема на $[0;1]$ и $f'(0)f'(1) < 0$, то $\exists\xi \in (0;1):\ f'(\xi) = 0$.

4. Если функция f является производной некоторой функции, то она любой промежуток $\Delta \subset D_f$ отображает на промежуток.

5. Пусть функция $f(x)$ имеет производную на интервале $(a;x_0)$. Если $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, а $f'(x)$ имеет предел при $x \to x_0 - 0$, то этот предел равен ${f_-}'(x_0)$. Справедливо ли обратное утверждение?

Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для правой производной.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$, дифференцируема на $(0;1)$ и, кроме того, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$ и $f'(x) \geqslant -2$ $\forall x \in (0;1)$, то эта функция линейная.

7. Все корни производной многочлена

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

действительные, простые и лежат на интервалах (0;1), (1;2), (2;3), (3;4).

8. Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$, у которого $a \neq b$ и $ab > 0$, то

$$\exists\xi \in (a;b):\ \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

9. Если функция f на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и не является постоянной, то

$$\exists\xi_1,\xi_2 \in (a;b):\ f'(\xi_1) < 0 < f'(\xi_2).$$

10. Справедливо ли утверждение: если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a;b)$, то

$$\forall\xi \in (a;b)\ \exists[\alpha;\beta] \subset (a;b):\ \xi \in (\alpha;\beta)$$

и
$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)?$$

Важным следствием теоремы Коши о среднем является формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. А именно, справедливо следующее утверждение:

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0)$, точки x_0 имеет непрерывную производную n-го порядка и $f^{(n)}(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\bullet}{O}(x_0)$ то
$$\forall x \in \overset{\bullet}{O}(x_0) \;\; \exists \theta \in (0;1):$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$
где $\xi = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$.

11. Написать разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в точке $x_0 = 0$ следующих элементарных функций:
$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1+x)^\alpha, \quad \ln(1+x).$$

12. С помощью формулы Тейлора оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$, $x \in [0;1]$;

б) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, $|x| \leqslant 1/2$;

в) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$, $|x| \leqslant 0{,}1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, $x \in [0;1]$.

13. С помощью формулы Тейлора вычислить:

а) e с точностью до 10^{-7};

б) $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-8};

в) $\lg 11$ с точностью до 10^{-5};

г) $\sin 85^\circ$ с точностью до 10^{-5}.

14. Доказать, что
$$\forall n \geqslant 2 \;\; \exists \theta \in (0;1): \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta}{n!n}.$$

15. Доказать, что если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ограничена и имеет ограниченные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, то

$$\|f'\|^2 \leqslant 2\|f\| \cdot \|f''\|,$$

где, например, $\|f\| = \sup_x |f(x)|$.

16. Для приближенного вычисления длины дуги окружности П.Л. Чебышев предложил следующее правило:

Длина дуги окружности приближенно равна сумме длин равных сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде и имеющего высоту $2/\sqrt{3}$ стрелки.

Оценить относительную погрешность этого правила Чебышева.

17. Пусть s — длина дуги окружности, d — длина соответствующей ей хорды, а δ — длина хорды, соответствующей половине дуги. При каких значениях A и B приближенное равенство $s \approx Ad + B\delta$ будет наиболее точным для малых дуг? (Формула Х. Гюйгенса.)

18. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 имеет непрерывную производную n-го порядка и $f^{(n)}(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\bullet}{O}(x_0)$. Доказать, что тогда для любой функции $\varphi(x)$, которая непрерывна в $O(x_0)$ и имеет отличную от нуля конечную производную в $\overset{\bullet}{O}(x_0)$, справедливо следующее утверждение:

$$\forall x \in \overset{\bullet}{O}(x_0) \ \exists \theta \in (0;1):$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

где $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$.

19. Из предыдущей формулы при $\varphi(z) = (x-z)^p$, $p > 0$, вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме О. Шлемильха:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

§ 4. Первообразные и неопределенные интегралы

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ, если она на Δ непрерывна, кусочно дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ всюду на Δ, кроме конечного числа точек. Если же $F(x)$ дифференцируема на Δ и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \Delta$, то $F(x)$ называется точной первообразной для $f(x)$.

Любая первообразная функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Доказать следующие утверждения.

1. Если $F(x)$ — какая-то первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

2. Если функция $f(x)$ на промежутке Δ имеет первообразную, то

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

на Δ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек.

3. Если функция $F(x)$ непрерывна и кусочно дифференцируема на Δ, то

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на Δ имеют первообразные, то

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ на Δ имеет первообразную, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad \forall k \neq 0.$$

Что будет, если $k = 0$?

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на Δ и функция $g(x)f'(x)$ имеет первообразную, то

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

(формула интегрирования по частям).

7. Пусть функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ определены на некоторых промежутках и такие, что имеет смысл композиция $f(\varphi(x))$. Тогда если $\varphi(x)$ дифференцируема, а $f(y)$ имеет первообразную, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy,$$

где $y = \varphi(x)$. Если функция $x = \varphi^{-1}(y)$ дифференцируема, а функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообразную, то

$$\int f(y)dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

где $x = \varphi^{-1}(y)$.

Привести примеры использования этих формул.

8. Найти первообразную функции $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Будет ли эта первообразная точной?

9. Найти первообразную функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$. Будет ли эта первообразная точной?

10. Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь. Тогда если число a — корень кратности $k \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т.е. $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ и $Q_1(a) \neq 0$, то существуют число A и многочлен $P_1(x)$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)},$$

где последняя дробь является правильной.

11. Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь, и пусть $Q(x) = ((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k Q_1(x)$, $\beta \neq 0$, причем многочлен $Q_1(x)$ не делится на $(x-\alpha)^2 + \beta^2$. Тогда существуют постоянные A и B и многочлен $P_1(x)$ такие,

что
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k} + \frac{P_1(x)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}Q_1(x)},$$
где последняя дробь является правильной.

12. Доказать, что любая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простых дробей, и это представление единственное.

Глава 2
Исследование функций с помощью производных

§ 1. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на интервале $(a; b)$ дифференцируемы, $g'(x) \neq 0$ и $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ (или $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$) при $x \to b$. Тогда если при $x \to b$ отношение производных $f'(x)/g'(x)$ имеет предел, то

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to a$.

Отметим, что здесь интервал $(a; b)$ и предел отношения могут быть как конечными, так и бесконечными.

Сформулированные утверждения называются правилами Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1. В правилах Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ утверждается, что если предел отношения производных существует, то отношение самих функций тоже имеет предел.

Справедливо ли обратное утверждение?

Рассмотреть предел отношения $\dfrac{x + \sin x}{x}$ при $x \to +\infty$.

2. Справедливо ли утверждение: если предел отношения производных существует, то предел отношения самих функций равен пределу отношения производных?

Рассмотреть предел отношения функций $f(x) = \sin x + \cos x$ и $g(x) = x + 2$ при $x \to 0$.

Вычислить следующие пределы:

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax}{\cos bx}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$.

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$.

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a - a^x}{x^a - a^a}$.

Неопределенности типа $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 и т.п. путем алгебраических преобразований и логарифмирования приводятся к неопределенностям двух основных видов $0/0$ и ∞/∞.

Вычислить следующие пределы:

11. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

12. $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha} - \dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

15. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0, \text{ и } f(0) = 0.$$

16. Найти асимптоту графика функции

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$$

при $x \to +\infty$.

17. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет вторую производную, то

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

§ 2. Асимптотические разложения по формуле Тейлора

В предыдущей главе ужу рассматривалась формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

1. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, доказать, что если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет n-ю производную и эта производная непрерывна в точке x_0, то справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0. \quad (1)$$

(Оно называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.)

2. Доказать, что асимптотическое равенство (1) справедливо для любой функции $f(x)$, которая в точке x_0 имеет n-ю производную.

3. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; x_0)$ (или на $(x_0; b)$). Доказать, что для любого целого q эта функция может иметь единственное асимптотическое разложение вида

$$f(x) = \sum_{k=p}^{q} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^q) \text{ при } x \to x_0,$$

где p — целое, и $p \leqslant q$.

4. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; +\infty)$ (или на $(-\infty; b)$). Доказать, что для любого целого q эта функция может иметь единственное асимптотическое разложение вида

$$f(x) = \sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^q}\right) \text{ при } x \to +\infty \ (x \to -\infty).$$

5. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в точке $x_0 = 0$ для функций:

$$\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x.$$

6. Применяя метод неопределенных коэффициентов, разложить функцию $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^5)$.

7. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функции:

$$\cos 2x,\ \sin^2 x \cos x,\ \frac{1}{x^4-2x^2+1},\ \frac{1}{x^4+x^2-2}.$$

8. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n})$ функции:

$$\sin x \cdot \cos 2x,\ \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

9. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

10. Получить асимптотические разложения по степеням x функций:

а) $\cos\sqrt[3]{x}$ до $o(x^3)$ при $x \to 0$.

б) $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ до $o(x^n)$ при $x \to \pm\infty$.

Можно ли утверждать, что полученные разложения — это формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано?

§ 3. Условия монотонности и выпуклости дифференцируемых функций. Экстремумы и точки перегиба

Дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ постоянна на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ на $(a;b)$. Она возрастает (убывает) на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)\geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на $(a;b)$. Если же $f'(x)>0$ (<0) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Точка x_0 называется стационарной точкой функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=0$. Если же $f'(x_0)>0$ (<0), то x_0 называется точкой возрастания (убывания) функции $f(x)$.

Из теоремы Ферма следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее стационарных точек и точек, в которых нет производной.

Доказать следующие утверждения.

1. Функция $f(x)$ строго возрастает (убывает) на отрезке $[a;b] \subset D_f$, если она непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ (< 0) на $(a;b)$.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности. Тогда, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 — точка строгого максимума, а если с $-$ на $+$, то x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$.

3. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную n-ю производную $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда если n четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0), то x_0 — точка строгого минимума (максимума) функции $f(x)$. Если же n нечетное и $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0), то при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) на интервале $(a;b) \subset D_f$, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

$$(\text{соотв. } f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)).$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке ее график имеет касательную. Тогда если существует $O(x_0)$ такая, что точки графика функции при $x \in \overset{\bullet}{O}(x_0)$ лежат выше (ниже) касательной, то x_0 называется точкой выпуклости вниз (вверх) функции $f(x)$. Если же точки графика ее сужения на $O(x_0)$ для $x < x_0$ и $x > x_0$ лежат по разные стороны от касательной, то x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$.

4. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)$ строго убывает (возрастает) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго выпукла вверх (вниз) на $(a;b)$.

5. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную вторую производную и точка x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

6. Если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна и $f'(x_0) = +\infty$ (или $-\infty$), то x_0 — точка перегиба для $f(x)$.

7. Равенство нулю второй производной является необходимым условием, а смена знака второй производной — достаточным условием точки перегиба функции.

8. Можно ли утверждать, что если x_0 — точка перегиба функции $y = f(x)$, то она разделяет интервалы выпуклости разной направленности? А наоборот, если x_0 разделяет интервалы выпуклости, то x_0 — точка перегиба? Будет ли точка возврата точкой перегиба?

9. Можно ли утверждать, что произведение выпуклых вверх функций является выпуклой вверх функцией?

10. Доказать, что если функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$ выпукла вниз, то она непрерывна на $(a; b)$.

11. Если дважды дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, то $\exists x_0 : \ f''(x_0) = 0$.

12. Пусть дифференцируемая на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x)$ не меняет направление выпуклости. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

13. Пусть дифференцируемая на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x)$ не меняет направление выпуклости. Доказать, что если прямая $y = kx + b$ является асимптотой для $f(x)$ при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$. А если, кроме того, график этой функции лежит ниже асимптоты, то она выпукла вверх.

14. Доказать, что если $0 < \alpha < 1$, то

$$x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha \quad \forall x \geqslant 0,$$

причем равенство возможно только при $x = 1$.

15. Доказать, что если $p > 1$ и $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, то

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a > 0, b > 0,$$

(неравенство Юнга).

16. Для того чтобы функция f была выпуклой вниз (вверх) на отрезке $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы на любом интервале $(x_1;x_2) \subset [a;b]$ выполнялось условие:

$$\forall x \in (x_1;x_2) \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$$\left(\text{ соотв.,} \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right).$$

17. Если функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$, то для любых x_1,x_2,x_0 таких, что $a < x_1 < x_2 < x_0 < b$, справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

А если $a < x_0 < x_2 < x_1 < b$, то

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

18. Если функция f выпукла вниз или вверх на отрезке $[a;b]$, то она на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\exists C: \ \forall x_1,x_2 \in [\alpha:\beta] \quad |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant C|x_1-x_2|.$$

19. Если функция f выпукла вниз или вверх на отрезке $[a;b]$, то в любой точке $x_0 \in (a;b)$ у нее существуют односторонние производные. Причем если f выпукла вниз, то $f_-{}'(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$, а если f выпукла вверх, то $f_-{}'(x_0) \geqslant$ $\geqslant f'_+(x_0)$.

20. Если функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$, то для любых x_1 и x_2 таких, что $a < x_1 < x_2 < b$ справедливо неравенство $f_+{}'(x_1) \leqslant f_-{}'(x_2)$.

21. Если функция f выпукла (вниз или вверх) на отрезке $[a;b]$, то существует не более чем счетное множество γ точек интервала $(a;b)$, вне которого, т.е. в любой точке $x \in (a;b)\backslash\gamma$, функция f дифференцируема.

22. Если функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$, то для любых точек $x_1,x_2,\ldots,x_n$ из $[a;b]$ и любых положительных чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

А если функция f выпукла вверх, то

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Эти неравенства называются *неравенствами Иенсена.*

23. Используя выпуклость логарифма, доказать, что если $p > 1$ и q такое, что $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, то для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Глава 3
Векторные функции и кривые на плоскости и в пространстве

§ 1. Пределы и производные векторных функций

Пусть t_0 — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $T \subset \mathbb{R}$. Вектор $\vec{a}$ называется пределом векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in T$, при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

В этом случае пишут: $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$ или "$\vec{r}(t) \to \vec{a}$ при $t \to$ $\to t_0$".

Векторная функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, называется непрерывной в предельной точке $t_0 \in T$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$. В изолированной точке множества T функция $\vec{r}(t)$ тоже считается непрерывной.

Пусть заданы векторная функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, и точка $t_0 \in T$. Тогда предел

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

называется производной этой функции в точке t_0 и обозначается $\vec{r}\,'(t_0)$ или $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\,(t_0)$.

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0, если она определена в некоторой окрестности $O(t_0)$ и имеет $\vec{r}\,'(t_0)$.

Доказать следующие утверждения.

1. Пусть задана последовательность векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$, $\ldots$ Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был пределом этой последовательности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon.$$

2. Вектор $\vec{a}$ является пределом последовательности $\{\vec{a}_n\}$ тогда и только тогда, когда его координаты являются пределами последовательностей из соответствующих координат векторов.

3. Если $\alpha_n \to \alpha$, $\vec{a}_n \to \vec{a}$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \vec{a}_n = \alpha \vec{a}.$$

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |\vec{a}_n| = |\vec{a}|$. Справедливо ли обратное утверждение?

5. Если $\vec{a}_n \to \vec{a}$, $\vec{b}_n \to \vec{b}$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\vec{a}_n \pm \vec{b}_n) = \vec{a} \pm \vec{b},$$
$$\lim_{n\to\infty} (\vec{a}_n, \vec{b}_n) = (\vec{a}, \vec{b}),$$
$$\lim_{n\to\infty} [\vec{a}_n, \vec{b}_n] = [\vec{a}, \vec{b}].$$

6. Длина непрерывного вектора, сумма непрерывных векторов и любое произведение непрерывных функций непрерывны (в точке или на некотором множестве).

7. Если числовая функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а векторная функция $\vec{r}(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $\vec{r}(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

8. Векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы координаты вектора $\vec{r}(t)$, причем координатами вектора-производной являются производные координат вектора $\vec{r}(t)$.

9. Если функции $\vec{a}(t)$ и $\vec{b}(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то в этой точке

$$(\vec{a} \pm \vec{b})' = \vec{a}' \pm \vec{b}',$$
$$(\vec{a}, \vec{b})' = (\vec{a}', \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b}'),$$
$$[\vec{a}, \vec{b}]' = [\vec{a}', \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}'].$$

10. Если функции $f(t)$ и $\vec{r}(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то в этой точке
$$(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'.$$

11. Если функция $\varphi = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $\vec{r} = \vec{r}(\varphi)$ дифференцируема в точке $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $\vec{r}(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

12. При движении точки по сфере ее скорость ортогональна радиусу сферы.

13. Верно ли, что если векторная функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то
$$\exists \xi \in (a;b): \ \ \vec{r}(b) - \vec{r}(a) = \vec{r}\,'(\xi)(b-a)?$$

14. Если $\vec{r}(t)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, то
$$\exists \xi \in (a;b): \ \ |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)|(b-a).$$

15. Если функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $\vec{r}(t_0) \neq \vec{0}$, то $|\vec{r}(t)|$ тоже дифференцируема в точке t_0.

Является ли существенным условие $\vec{r}(t_0) = \vec{0}$?

16. Если функция $\vec{r}(t)$, $t \in (a;b)$, дифференцируема и $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ на $(a;b)$, то направление вектора $\vec{r}(t)$ постоянно на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $\vec{r}\,'(t) \| \vec{r}$ на $(a;b)$.

Где используется условие $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$?

17. Если дважды дифференцируемая на промежутке Δ функция $\vec{r}(t)$ такая, что
$$(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{r}\,'') = 0, \ [\vec{r},\vec{r}\,'] \neq \vec{0} \ \ \forall t \in \Delta,$$
то годограф этой функции лежит на некоторой плоскости.

18. Траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской.

19. Годографом функции $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c}$, где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — постоянные векторы, является парабола, если $[\vec{b},\vec{c}] \neq \vec{0}$.

20. Годографом функции $\vec{r} = \vec{a} + \cos t \cdot \vec{b} + \sin t \cdot \vec{c}$, $t \in [0; 2\pi]$, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — постоянные векторы, является эллипс, если $[\vec{b},\vec{c}] \neq \vec{0}$.

§ 2. Кривые на плоскости и в пространстве

Пусть на промежутке Δ задана непрерывная векторная функция $\vec{r}(t)$. Тогда множество Γ всех точек пространства (или плоскости) с радиус-векторами $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in \Delta$, называется ориентированной кривой, а функция $\vec{r}(t)$, $t \in \in \Delta$, — параметрическим заданием (или представлением) этой кривой. Считается, что другая непрерывная векторная функция $\vec{f}(\tau)$, $\tau \in \tilde{\Delta}$, задает ту же ориентированную кривую Γ, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau = \varphi(t)$, $t \in \Delta$, такая, что $\varphi(\Delta) = \tilde{\Delta}$ и $\vec{f}(\varphi(t)) = \vec{r}(t)$ $\forall t \in \Delta$. Любая такая функция $\tau = \varphi(t)$ называется допустимым преобразованием параметра кривой Γ.

Кривая, имеющая дифференцируемое (или непрерывно дифференцируемое) представление, называется дифференцируемой (соответственно, непрерывно дифференцируемой). Аналогично определяются n раз дифференцируемые кривые.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$. Через точки M и M_0 с радиус-векторами $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ проведем секущую MM_0. Очевидно, вектор

$$\vec{e} = \frac{\Delta\vec{r}/\Delta t}{|\Delta\vec{r}/\Delta t|},$$

где $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, является единичным вектором прямой M_0M. Тогда прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{e}$, где $\vec{e} = = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{e}(t)$, называется касательной к кривой Γ в точке M_0.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ — дифференцируемая кривая. Точка M_0 этой кривой с радиус-вектором $\vec{r}(t_0)$ называется неособой, если $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, и особой, если $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$.

Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой кривой.

Доказать следующие утверждения.

1. Дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ в любой неособой точке M_0 с радиус-вектором $\vec{r}(t_0)$ имеет касательную, которая задается уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0).$$

2. Если кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ такая, что в точке t_0 существует $\vec{r}^{(n)}(t_0) \neq \vec{0}$, а $\vec{r}\,'(t_0) = \ldots = \vec{r}^{(n-1)}(t_0) = \vec{0}$, то в точке M_0 с радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ у кривой Γ существуют односторонние касательные. Причем если n нечетное, то в точке M_0 существует обычная касательная (т.е. в точке M_0 нет излома), а если n четное, то M_0 — точка возврата.

3. Если плоская гладкая кривая Γ имеет концевые точки, то она является суммой конечного числа гладких кривых, каждая из которых имеет явное задание (может быть, с другой ориентацией). Справедливо ли это утверждение для гладкой кривой без концевых точек?

4. Какую кривую задают уравнения

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}?$$

5. Какие преобразования параметра гладкой кривой являются допустимыми?

§ 3. Длина кривой

Длиной кривой Γ называется точная верхняя грань длин ломанных, вписанных в эту кривую. Очевидно, длина S любой кривой Γ удовлетворяет неравенствам: $0 \leqslant S \leqslant +\infty$. Если $S < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

Доказать следующие утверждения.

1. Если кривая Γ спрямляема, то и любая кривая γ, являющаяся частью кривой Γ, тоже спрямляема.

2. Если кривая Γ является суммой кривых Γ_1 и Γ_2 и S,S_1,S_2 — длины этих кривых, то $S = S_1 + S_2$.

3. Существует неспрямляемая кривая Γ, которая является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

4. Если кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема и S — ее длина, то

$$S \leqslant (b-a) \sup_t |\vec{r}\,'(t)|.$$

5. Пусть $s(t)$ — переменная длина дуги кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t), a \leqslant t \leqslant b\}$. Тогда если кривая Γ непрерывно дифференцируема, то $s(t)$ тоже непрерывно дифференцируема и $s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| \quad \forall t \in [a; b]$.

6. У любой гладкой кривой есть представление, в котором параметром является переменная длина дуги.

7. Предел отношения длины дуги $|\Delta s|$ к длине стягивающей хорды $|\Delta \vec{r}|$ при $\Delta s \to 0$ равен 1.

8. Пусть векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t — время, описывает движение точки M на плоскости или в пространстве. Тогда если $|\vec{r}\,'(t)| \neq 0$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и его длина равна скорости движения по траектории.

§ 4. Кривизна плоской кривой

Любая гладкая кривая Γ имеет представление $\vec{r} = \vec{r}(s)$, в котором параметром является переменная длина дуги s. Тогда $\vec{e} = \vec{r}\,'(s)$ — единичный вектор касательной к Γ в точке M с радиус-вектором $\vec{r}(s)$.

Скорость вращения касательной к кривой Γ в точке M относительно s, т.е. $k(s) = |\vec{e}\,'(s)|$, называется кривизной кривой Γ в точке M.

Если $k(s) > 0$, то единичный вектор $\vec{n} = e'(s)/k(s)$ ортогонален вектору $\vec{e}$ и указывает направление его вращения. Пара единичных векторов $\vec{e}$,$\vec{n}$ называется основным репером плоской кривой Γ.

Пусть кривая Γ в точке M имеет кривизну $k > 0$. Тогда число $R = 1/k$ называется радиусом кривизны кривой, а точка с радиус-вектором $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{n}$ — центром кривизны кривой Γ в точке M.

Множество γ всех центров кривизны данной кривой Γ называется ее эволютой, а кривая Γ называется эвольвентой для γ.

Доказать следующие утверждения.

1. Если гладкая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ дважды дифференцируема, то

$$k(t) = \frac{|[\vec{r}\,'', \vec{r}\,']|}{|\vec{r}\,'|^3}, \quad t \in \Delta,$$

где $\vec{r}\,'$ — производная по параметру t.

В частности, если плоская кривая Γ задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$k(t) = \frac{|x''y' - y''x'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

2. Кривизна окружности радиуса R равна $k = 1/R$.

3. Если $k(x)$ — кривизна параболы $y = ax^2$, $a > 0$, то $k(0) = 2a$, $\lim\limits_{x\to\pm 0} k(x) = 0$.

4. Если $k(x)$ — кривизна эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geqslant b$, то

$$\max_t k(t) = \frac{a}{b^2}, \quad \min_t k(t) = \frac{b}{a^2}.$$

5. Если гладкая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ дважды дифференцируема, то ее эволюта задается векторной функцией

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{|\vec{r}\,'|^2}{|[\vec{r}\,'', \vec{r}\,']|^2}[\vec{r}\,', [\vec{r}\,'', \vec{r}\,']], \quad t \in \Delta.$$

6. Эволюта гладкой дважды дифференцируемой кривой $\Gamma = \{x(t), y(t), t \in \Delta\}$ задается уравнениями:

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, y', \\[2mm] \eta = y + \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, x'. \end{cases}$$

В частности, если кривая Г задана уравнением $y = f(x)$, то

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} x'.$$

7. Нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте.

8. Приращение длины дуги эволюты равно приращению радиуса кривизны эвольвенты.

9. Пусть векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t — время, описывает движение точки M. Тогда

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{e} + \frac{v^2}{R}\vec{n},$$

где v — линейная скорость, а R — радиус кривизны годографа в момент времени t.

10. Найти эволюты следующих кривых:

а) параболы ax^2, $a > 0$;

б) эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

в) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

§ 5. Кривизна и кручение пространственной кривой

Пусть дважды дифференцируемая кривая Г имеет представление $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s — переменная длина дуги. Как и на плоскости, величина $k = |\vec{r}''(s)|$ называется кривизной кривой Г в точке M с радиус-вектором $\vec{r}(s)$. Если, кроме того, $k \neq 0$, то единичный вектор $\vec{n}$, сонаправленный с $\vec{r}''(s)$, называется вектором главной нормали кривой Г в точке M.

Плоскость, проходящая через касательную и через главную нормаль кривой Г в точке M, называется соприкасающейся плоскостью кривой Г в точке M.

Если $\vec{e} = \vec{r}\,'(s)$, а $\vec{n}$ — вектор главной нормали, то единичный вектор $\vec{b} = [\vec{e},\vec{n}]$ называется бинормалью кривой Г, а тройка единичных векторов $\vec{e},\vec{n},\vec{b}$ — основным репером (или трехгранником) кривой Г.

Число $\varkappa(s)$ такое, что $\vec{b}'(s) = -\varkappa(s)\vec{n}(s)$, называется кручением кривой Γ в рассматриваемой точке.

Доказать следующие утверждения.

1. Если гладкая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ дважды дифференцируема, то соприкасающаяся плоскость к Γ в точке M_0 с радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ имеет уравнение $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_0' \vec{r}_0'') = 0$, где $\vec{r}_0' = \vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}_0'' = \vec{r}\,''(t_0)$.

2. Если $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ — основной репер гладкой трижды дифференцируемой кривой Γ, то

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}}{ds} = k\vec{n}, \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{e} + \varkappa\vec{b}, \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\varkappa\vec{n}, \end{cases}$$

где s — переменная длина дуги кривой Γ, а k и $\varkappa$ — кривизна и кручение кривой Γ в рассматриваемой точке.

3. Если гладкая трижды дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t), t \in \Delta\}$ такая, что $|[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']|$, то ее кручение $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']|^2}.$$

4. Если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая плоская.

5. Если кривизна кривой тождественно равна нулю, то она является частью прямой.

6. Найти кривизну и кручение винтовой линии:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = ht,$$

где $R > 0$, $\omega \neq 0$, $h \neq 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ